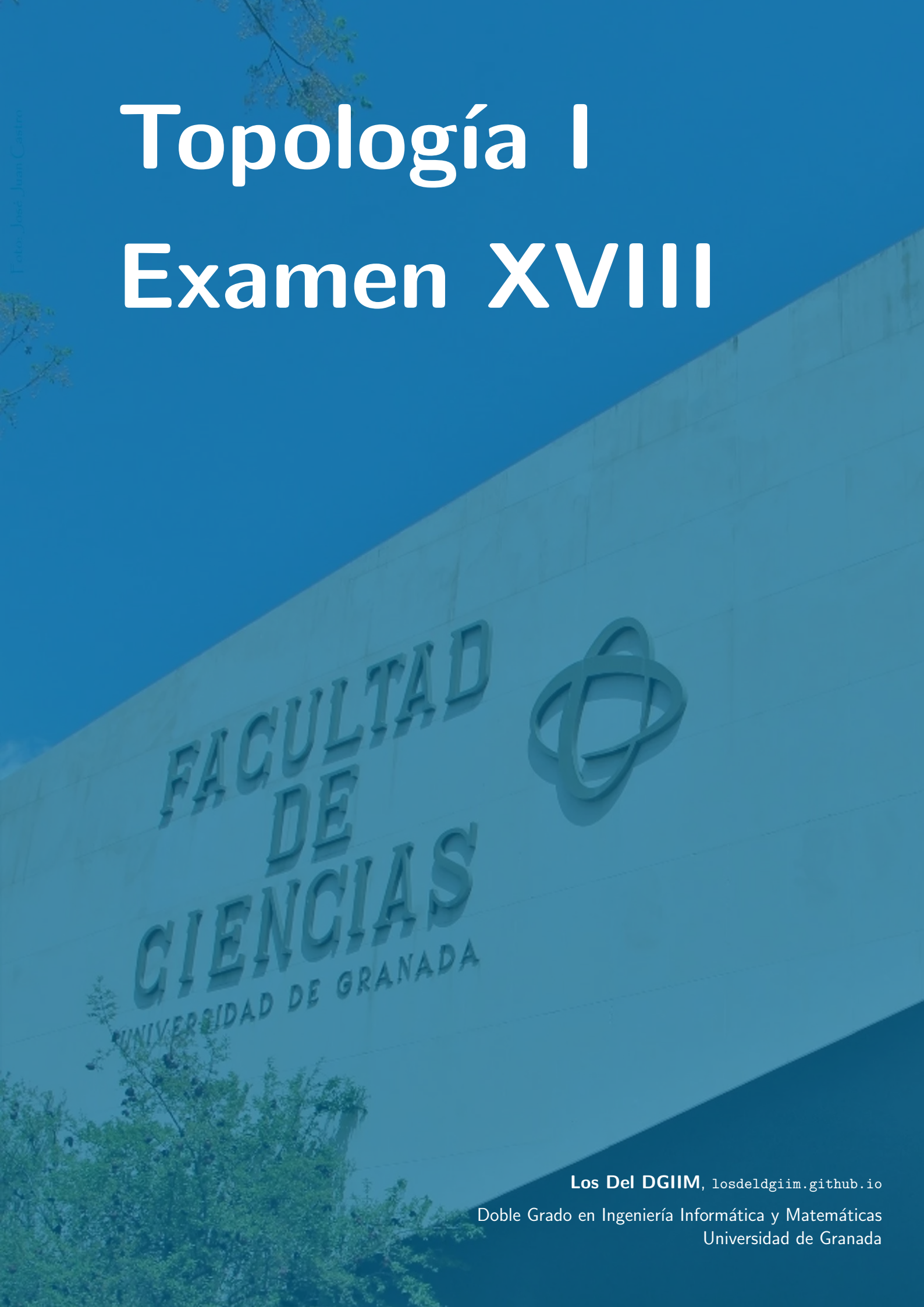
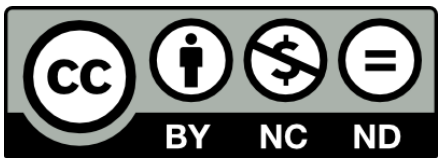
Topología I
Examen XVIII



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Topología I
Examen XVIII

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Lucía Benjumeda Maldonado

Granada, 2026

Asignatura Topología I.

Curso Académico 2025-26.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Antonio Alarcón López.

Descripción Parcial 2.

Fecha 12 de noviembre de 2025.

Duración 120 minutos.

Ejercicio 1. (2,5 puntos) Define espacio topológico T1 y demuestra que (X, T) es T1 si y sólo si $\{x\}$ es cerrado para todo $x \in X$.

Ejercicio 2. Sea X un conjunto y $A \subset X$ con $A \neq \varnothing$ y $A \neq X$. Se considera la siguiente familia de subconjuntos de X:

$$B = \{\{x\} \cup A : x \in X\}.$$

1. (1 punto) Prueba que existe una única topología T en X para la cual B es base.
2. (0,5 puntos) Demuestra que si $U \subset X$ con $U \neq \varnothing$, entonces $U \in T$ si y sólo si $A \subset U$.
3. (1 punto) Identifica las topologías inducidas sobre A y $X \setminus A$.
4. (1 punto) Estudia si (X, T) es 1AN y 2AN.

Ejercicio 3. En $\mathbb{R}^2$ denotamos por d a la distancia usual y definimos la familia de subconjuntos T de la siguiente forma:

$$T = \{U \subset \mathbb{R}^2 : (0,0) \notin U\} \cup \{U \subset \mathbb{R}^2 : \exists \varepsilon > 0 \text{ con } B_d((0,0), \varepsilon) \subset U\}.$$

1. (1,5 punto) Demuestra que T es una topología en $\mathbb{R}^2$. Compárala con la topología usual de $\mathbb{R}^2$.
2. (1 punto) Calcula una base de entornos de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ en $(\mathbb{R}^2, T)$.
3. (1 punto) Calcula la adherencia y el interior de $\mathbb{Q} \times \{0\}$ y $\mathbb{Q} \times (0, 1)$ en $(\mathbb{R}^2, T)$.

Ejercicio 1. (2,5 puntos) Define espacio topológico T1 y demuestra que (X, T) es T1 si y sólo si $\{x\}$ es cerrado para todo $x \in X$.

Un espacio topológico (X, T) es T1 si para cada par de puntos $x, y \in X$, $x \neq y$ existen un $U, V \in T$ con $x \in U$ y $y \in V$ tales que $y \notin U$ y $x \notin V$.

Veamos ahora por doble implicación que (X, T) es T1 si y sólo si $\{x\}$ es cerrado para todo $x \in X$:

$\Rightarrow$ Supongamos que (X, T) es T1, vamos a ver que sea $x \in X$ arbitrario entonces $\{x\} = \overline{\{x\}}$. Está claro que $\{x\} \subset \overline{\{x\}}$. Para la otra inclusión sea $y \in \overline{\{x\}}$, entonces para todo $V \in T$ con $y \in V$ se tiene que $V \cap \{x\} \neq \varnothing$, lo que implica que $x \in V$. Si fuese $x \neq y$, como (X, T) es T1 existiría $V' \in T$ con $y \in V'$ y $x \notin V'$, contradicción. Por tanto $x = y$ (y en particular $y \in \{x\}$).

$\Leftarrow$ Supongamos que $\{x\}$ es cerrado para todo $x \in X$, vamos a ver que (X, T) es T1. Sea $x, y \in X$ con $x \neq y$. Entonces $x \in X \setminus \{y\}$ y $y \in X \setminus \{x\}$. Como $U = X \setminus \{y\}$ y $V = X \setminus \{x\}$ son abiertos (complementario de cerrado), existen $U, V \in T$ tales que $x \in U$ y $y \in V$ y además, $y \notin U$ y $x \notin V$.

Ejercicio 2. Sea X un conjunto y $A \subset X$ con $A \neq \varnothing$ y $A \neq X$. Se considera la siguiente familia de subconjuntos de X:

$$B = \{\{x\} \cup A : x \in X\}.$$

1. (1 punto) Prueba que existe una única topología T en X para la cual B es base.
   Vamos a probar que $\mathcal{B} = \{B \subseteq X : B = \{x\} \cup A \text{ con } x \in X\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una base de una topología en X. Para ello probemos que cumple las siguientes propiedades:

   (B1) $X = \bigcup_{B \in B} B$

   $\subseteq$ Trivial porque sea $x \in X$, entonces existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B = \{x\} \cup A$.

   $\supseteq$ Sea $x \in \bigcup_{B \in B} B$, entonces existe un $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x = \{x\} \cup A$ por definición con $x \in X$.

   (B2) Sea $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Sean $B_1 = \{x_1\} \cup A$ y $B_2 = \{x_2\} \cup A$, distinguimos los siguientes casos:

   1) Si $x \in A$ bastaría tomar $B_3 = \{x\} \cup A = A$ porque claramente $x \in B_3 = A \subset B_1 \cap B_2$.
   2) Si $x \notin A$ entonces $x = x_1$ y $x = x_2$ para estar en la intersección. Supongamos que $x = x_1$, entonces tomando $B_3 = B_1 = \{x\} \cup A$ cumple que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

   Así quedaría demostrado que existe una única topología T en X para la cual B es base.

2. (0,5 puntos) Demuestra que si $U \subset X$ con $U \neq \varnothing$, entonces $U \in T$ si y sólo si $A \subset U$.
   Demostremos la doble implicación:

$\Rightarrow$ Supongamos que $U \in T$, entonces $U = \bigcup_{B_i \in \mathcal{B}} B_i = \bigcup_{i \in I}(\{x_i\} \cup A) = (\bigcup_{i \in I}\{x_i\}) \cup A$, por lo que, $A \subset U$.

$\Leftarrow$ Supongamos que $A \subset U$, entonces para todo $a \in A$ existe un $B_a = \{a\} \cup A = A$ con $a \in B_a \subset A \subset U$ luego $U \in \mathcal{N}_a, \forall a \in A$. Por otro lado si $b \in U \setminus A$ existe un $B_b = \{b\} \cup A$ con $b \in B_b \subset U$ y por lo tanto $U \in \mathcal{N}_b$. Luego $U \in \mathcal{N}_x, \forall x \in U$ lo que implica que $U \in T$.

3. (1 punto) Identifica las topologías inducidas sobre A y $X \setminus A$.

   Comencemos con la topología inducida $(A, T_{|A})$ que sabemos que tiene como base de la topología $\mathcal{B}_{|A} = \{B \cap A : B \in \mathcal{B}\} = \{(\{x\} \cup A) \cap A : x \in X\} = \{\varnothing\} \cup \{A\}$. De esta manera si escribimos todo abierto como unicón de sus bases tenemos sea $V \in T_{|A}$ entonces:

   - $V = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_{|A}} B = A$
   - $V = \varnothing$

   Luego $T_{|A} = \{\varnothing, A\}$ es la topología trivial.

   Por otro lado, la topología inducida $(X \setminus A, T_{|X\setminus A})$ tiene como base de la topología $\mathcal{B}_{|X\setminus A} = \{B \cap (X \setminus A) : B \in \mathcal{B}\} = \{(\{x\} \cup A) \cap (X \setminus A) : x \in X\} = \{\{x\} : x \in X \setminus A\}$. De esta manera si escribimos todo abierto como unión de sus bases tenemos sea $V \in T_{|X\setminus A}$ entonces $V = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_{|X\setminus A}} B = \bigcup_{x \in V}\{x\} = V$. Con lo que claramente se ve que $T_{|X\setminus A} = \mathcal{P}(X \setminus A)$ es la topología discreta.

4. (1 punto) Estudia si (X, T) es 1AN y 2AN.
   Vamos a probar que (X, T) es 1AN. Para ello observemos que sea $x \in X$ entonces $\mathcal{B}_x = \{\{x\} \cup A\}$ es una base de entornos de x pues sea $U \in T$ arbitrario, con $x \in U$, como $U \neq \varnothing$ y $U \in T$, por el apartado 2 se tiene que $A \subset U$. Como además $x \in U$, de alguna de las maneras, $\exists V = \{x\} \cup A$ entorno básico de x tal que $x \in V \subset U$.
   Habiendo demostrado que en efecto $\mathcal{B}_x = \{\{x\} \cup A\}$ es base de entornos de x, el resultado es inmediato pues $\mathcal{B}_x$ es finita, de hecho tiene un único elemento, luego es numerable y (X, T) es 1AN.

   Ahora vamos a demostrar que (X, T) puede ser o no 2AN dependiendo de A:

   - Si $X \setminus A$ es numerable (o finito), entonces existe una cantidad numerable de puntos $\{x_n\}_{n \in I} = X \setminus A$ (con $I \subseteq \mathbb{N}$) y por lo tanto tomando $\mathcal{B}_n = \{A\} \cup \{\{x_n\} \cup A : n \in I\}$ tenemos una familia numerable. Comprobemos que es efectivamente una base de T:

     Sabemos por el apartado 1 que $\mathcal{B} = \{\{x\} \cup A : x \in X\}$ es una base de T. Basta observar que $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}$, ya que para todo $x \in X$:

     - Si $x \in A$, entonces $\{x\} \cup A = A \in \mathcal{B}_n$.
     - Si $x \in X \setminus A$, entonces $x = x_n$ para algún $n \in I$, luego $\{x\} \cup A = \{x_n\} \cup A \in \mathcal{B}_n$.

     Por tanto, $\mathcal{B}_n$ es una base numerable de T y (X, T) es 2AN.

- Si $X \setminus A$ es no numerable, supongamos por reducción al absurdo que (X,T) tiene una base numerable $\mathcal{B}_n$. Tomemos $I = X \setminus A$ (no numerable) y la familia de abiertos $\{U_i\}_{i\in I}$ definida por $U_i = \{x_i\} \cup A$ para cada $x_i \in X \setminus A$. Por definición de base, para cada $i \in I$ existe $B_i \in \mathcal{B}_n$ tal que $x_i \in B_i \subset U_i = \{x_i\} \cup A$. Como $B_i \in T$ y $B_i \neq \varnothing$, por el apartado 2 se tiene que $A \subset B_i$, lo que fuerza a que $B_i = \{x_i\} \cup A$. Si tomamos dos puntos $x_i, x_j \in X \setminus A$ con $x_i \neq x_j$, entonces $B_i \neq B_j$ (pues $x_i \notin B_j$) y por lo tanto $\{B_i\}_{i\in I}$ es una familia de abiertos no numerable, lo que contradice que $\mathcal{B}_n$ sea numerable pues estamos inyectando un conjunto no numerable en uno numerable. Luego (X,T) no es 2AN.

Ejercicio 3. En $\mathbb{R}^2$ denotamos por d a la distancia usual y definimos la familia de subconjuntos T de la siguiente forma:

$$T = \{U \subset \mathbb{R}^2 : (0,0) \notin U\} \cup \{U \subset \mathbb{R}^2 : \exists \varepsilon > 0 \text{ con } B_d((0,0),\varepsilon) \subset U\}.$$

1. (1,5 punto) Demuestra que T es una topología en $\mathbb{R}^2$. Compárala con la topología usual de $\mathbb{R}^2$.
   Para ello vamos a probar qye $T \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ cumple las siguientes propiedades:

   (A1) $\varnothing, \mathbb{R}^2 \in T$
   Está claro que $\varnothing \in T$ porque $(0,0) \notin \varnothing$. Por otro lado $\mathbb{R}^2 \in T$ porque $B_d((0,0),1) \subset \mathbb{R}^2$.

   (A2) Si $\{U_i\}_{i\in I} \subset T$, entonces $\bigcup_{i\in I} U_i \in T$
   Sea $\{U_i\}_{i\in I} \subset T$, entonces existen dos casos:
   - Si $(0,0) \notin U_i$ para todo $i \in I$, entonces $(0,0) \notin \bigcup_{i\in I} U_i$ y por lo tanto $\bigcup_{i\in I} U_i \in T$.
   - Si existe un $i_0 \in I$ tal que $(0,0) \in U_{i_0}$, entonces $\exists \varepsilon > 0$ tal que $B_d((0,0),\varepsilon) \subset U_{i_0}$. Por lo tanto $B_d((0,0),\varepsilon) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ y por lo tanto $\bigcup_{i\in I} U_i \in T$.

   (A3) Si $U_1, U_2 \in T$, entonces $U_1 \cap U_2 \in T$
   Sea $U_1, U_2 \in T$. Si $U_1 \cap U_2 = \varnothing \in T$ y ya lo tendríamos. Si $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, entonces distinguimos casos:
   - Si $(0,0) \notin U_1$ (y/o análogamente $(0,0) \notin U_2$), entonces $(0,0) \notin U_1 \cap U_2$ y por lo tanto $U_1 \cap U_2 \in T$.
   - Si $(0,0) \in U_1, U_2$ entonces $\exists \delta, \epsilon > 0$ tales que $B_d((0,0),\delta) \subset U_1$ y $B_d((0,0),\epsilon) \subset U_2$. Sea $\varepsilon = \text{mín}\{\delta, \epsilon\}$, entonces $B_d((0,0),\varepsilon) \subset B_d((0,0),\delta) \cap B_d((0,0),\epsilon) \subset U_1 \cap U_2$ y por lo tanto $U_1 \cap U_2 \in T$.

   Además es claro que $T_u \leqslant T$. Comprobémoslo de la siguiente manera: sea $B_1 = B_d((x,y),r) \in B_u$ con $(x,y) \in B_1$, $r > 0$ entonces:

   - Si $(x,y) = (0,0)$ entonces está claro que existe un $B_d((0,0),r') \in T$ con $r > r' > 0$ tal que $(x,y) \in B_d((0,0),r') \subset B_d((0,0),r)$
   - Si $(x,y) \neq (0,0)$ entonces para $d((x,y),(0,0)) > \epsilon > 0$ y $r > \epsilon$ se tiene $(0,0) \notin B_d((x,y),\epsilon) \Rightarrow B_d((x,y),\epsilon) \in T$ y por lo tanto $(x,y) \in B_d((x,y),\epsilon) \subset B_d((x,y),r)$

Por inclusión de las bases, $T_u \leqslant T$. Pero la otra implicación no es cierta, pues por ejemplo$\overline{B_d}((0,0),1) \in T$ pero $\overline{B_d}((0,0),1) \notin T_u$.

2. (1 punto) Calcula una base de entornos de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ en $(\mathbb{R}^2, T)$:
Sea $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ entonces:

$$\begin{cases} \mathcal{B}_{(x,y)} = \{\{(x,y)\}\} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \mathcal{B}_{(0,0)} = \{B_d((0,0),r) : r > 0\} \end{cases}$$

Vamos a comprobar que, efectivamente, es una base de entornos distinguiendo dos casos:

- $(x,y) = (0,0)$: Todo $B_d((0,0),r)$ es abierto en T y contiene a $(0,0)$. Además, si U es un entorno de $(0,0)$, existe un abierto $W \in T$ con $(0,0) \in W \subset U$, y por definición de T, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $(0,0) \in V = B_d((0,0),\varepsilon) \subset W \subset U$ con $V \in \mathcal{B}_{(0,0)}$.
- $(x,y) \neq (0,0)$: Como $(0,0) \notin \{(x,y)\}$, se tiene que $V = \{(x,y)\} \in T$ es un entorno abierto de (x,y). Así, para cualquier entorno U de (x,y) se cumple $(x,y) \in V \subset U$ con $V \in \mathcal{B}_{(x,y)}$.

Efectivamente $\mathcal{B}_{(x,y)}$ es una base de entornos de (x,y) en $(\mathbb{R}^2, T)$.

3. (1 punto) Calcula la adherencia y el interior de $\mathbb{Q} \times \{0\}$ y $\mathbb{Q} \times (0,1)$ en $(\mathbb{R}^2, T)$.

- $A = \mathbb{Q} \times \{0\}$
Demostramos que $A^\circ = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}) \times \{0\}$. Lo probaremos por doble implicación:
  - $\subseteq$ Basta ver que $(0,0) \notin A^\circ$. Si $(0,0) \in A^\circ$, existiría un abierto $U \in T$ tal que $(0,0) \in U \subset A$. Por definición de T, existiría $\varepsilon > 0$ tal que $B_d((0,0),\varepsilon) \subset U \subset A = \mathbb{Q} \times \{0\}$, lo cual es absurdo porque el punto $(0, \varepsilon/2) \in B_d((0,0),\varepsilon)$ no pertenece a A.
  - $\supseteq$ Como $(0,0) \notin (\mathbb{Q} \setminus \{0\}) \times \{0\}$, por definición de T este conjunto es abierto en $(\mathbb{R}^2, T)$. Al estar contenido en A, se cumple $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}) \times \{0\} \subset A^\circ$.

  Por otro lado veamos que $\overline{A} = A = \mathbb{Q} \times \{0\}$ probando que A es cerrado. Tenemos que $(0,0) \in A$, por lo que $(0,0) \notin \mathbb{R}^2 \setminus A$. Por definición de T, todo subconjunto que no contiene al origen es abierto, luego $\mathbb{R}^2 \setminus A \in T$ y por tanto A es cerrado y $\overline{A} = A$.
- $B = \mathbb{Q} \times (0,1)$
Es fácil ver que $B^\circ = B = \mathbb{Q} \times (0,1)$ pues $B \in T$. Para probarlo veamos que $(0,0) \notin B$, lo cual es inmediato ya que la segunda coordenada de $(0,0)$ es $0 \notin (0,1)$.
Ahora veamos que $\overline{B} = (\mathbb{Q} \times (0,1)) \cup \{(0,0)\}$ por doble implicación:
  - $\supseteq$ Claramente $B \subset \overline{B}$. Para ver que $(0,0) \in \overline{B}$, sea $U \in T$ un entorno abierto cualquiera con $(0,0) \in U$. Por definición de T, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_d((0,0),\varepsilon) \subset U$. Tomando $r = \min\{\varepsilon/2, 1/2\} > 0$, se cumple $(0,r) \in B_d((0,0),\varepsilon) \subset U$ y además $(0,r) \in \mathbb{Q} \times (0,1) = B$. Luego $U \cap B \neq \varnothing$ y por tanto $(0,0) \in \overline{B}$.

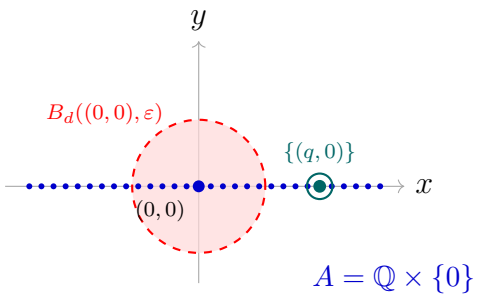


Figura 1: Representación de $A = \mathbb{Q} \times \{0\}$ y sus entornos críticos.

$\subseteq$ Sea $F = B \cup \{(0,0)\}$. Su complementario $\mathbb{R}^2 \setminus F$ no contiene al $(0,0)$, por lo que $\mathbb{R}^2 \setminus F \in T$ y F es cerrado. Como $B \subset F$ y $\overline{B}$ es el menor cerrado que contiene a B, se concluye que $\overline{B} \subset F$.

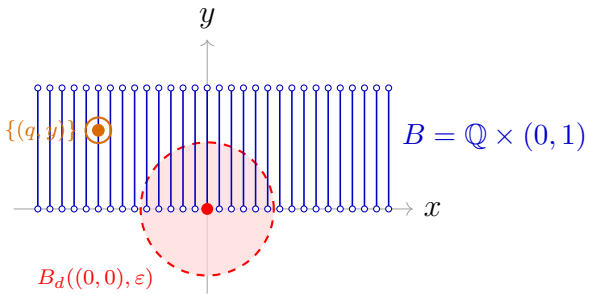


Figura 2: Representación de $B = \mathbb{Q} \times (0,1)$: $(0,0) \in \overline{B}$ porque toda bola $B_d((0,0),\varepsilon)$ corta a B en $(0,r)$, pero los puntos $(q,0)$ con $q \neq 0$ no están en $\overline{B}$ al ser $V = \{(q,0)\}$ un entorno abierto disjunto de B.